Лекция 6.

Волновые движения в атмосфере. Основные понятия волновых движений в атмосфере. Метод малых возмущений. Крупномасштабные волны.

Цель: Дать основные понятия волновых движений в атмосфере. Показать применение метода малых возмущений для решения уравнений волнового движения.

Основы математического моделирования атмосферных процессов, лектор ассоциированный профессор Маусумбекова Сауле Джумакановна

Волны на поверхности воды. Частицы воды совершают круговые движения. Вертикальный профиль описывается с помощью синусоиды, косинусоиды или экспоненциальной функции.

$$z(x,t) = Asin(mx - \sigma t);$$

$$z(x,t) = Acos(mx - \sigma t);$$

$$z(x,t) = Ae^{i(mx - \sigma t)};$$

$z(x,t)$- высота поверхности воды по отношению состояния покоя, A- амплитуда, $m = 2\pi/L$- волновое число, $\sigma = 2\pi/T$- круговая частота, ($\vartheta = \frac{\sigma}{2\pi} = 1/T$ -обычная частота, выражаемая числом колебаний в секунду, т.е. в герцах) L- длина волны, T –период. Скорость перемещения волны выражается в виде $c = \sigma/m$.

Крупномасштабные волны или волны Россби - проявление инерционных сил.
Гравитационные волны- проявление сил тяжести.
Акустические волны или волны сжатия, обусловлены сжатием или разрежением среды.

Метод малых возмущений

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + lv \qquad (6.1)$$

Уравнение является нелинейным, каждую из рассматриваемых функций представим в виде:

$$u = \overline{u} + u',\ v = \overline{v} + v',w = \overline{w} + w',\ \ p = \overline{p} + p',\ \ \rho = \overline{\rho} + \rho'$$

Где функции, отмеченные чертой, описывают основное состояние, функции со штрихами – малые отклонения от основного состояния, такие что:

$$\left|\frac{u'}{\overline{u}}\right| \ll 1,\ \left|\frac{v'}{\overline{v}}\right| \ll 1,\ \left|\frac{w'}{\overline{w}}\right| \ll 1,\ \left|\frac{p'}{\overline{p}}\right| \ll 1,\ \left|\frac{\rho'}{\overline{\rho}}\right| \ll 1 \qquad (6.2)$$

Метод малых возмущений

Подставляя (6.2) в (6.1) получим:

$$\frac{\partial(\bar{u}+u')}{\partial t}+(\bar{u}+u')\frac{\partial(\bar{u}+u')}{\partial x}+(\bar{v}+v')\frac{\partial(\bar{u}+u')}{\partial y}+(\bar{w}+w')\frac{\partial(\bar{u}+u')}{\partial z}$$
$$=-\frac{1}{(\bar{\rho}+\rho')}\frac{\partial(\bar{p}+p')}{\partial x}+l(\bar{v}+v')\Big)$$

Учитывая условия и пренебрегая малыми величинами получим следующее уравнение:

$$\frac{\partial u'}{\partial t}+\bar{u}\frac{\partial u'}{\partial x}+\bar{v}\frac{\partial u'}{\partial y}+\bar{w}\frac{\partial u'}{\partial z}=-\frac{1}{\bar{\rho}}\frac{\partial p'}{\partial x}+lv'$$

Решение ищем в виде рядов тригонометрических функций:

$$u'=\sum_{s=1}^{\infty}A_s\sin(m_s x),\quad u'=\sum_{s=1}^{\infty}A_s\cos(m_s x),\quad u'=\sum_{s=1}^{\infty}A_s\exp(im_s x)$$

Крупномасштабные волны

Для исследования этих волн возьмем уравнение вихря скорости в баротропном случае, то есть при отсутствии вертикальной скорости и при условии несжимаемости:

$$\frac{\partial \Omega}{\partial t} + u\frac{\partial \Omega}{\partial x} + v\frac{\partial \Omega}{\partial y} + \beta v = 0$$

Для линеаризации положим: $u = \bar{u} + u', \quad v = \bar{v} + v', \quad \Omega = \bar{\Omega} + \Omega'$

Получим следующее уравнение: $$\frac{\partial \Omega'}{\partial t} + \bar{u}\frac{\partial \Omega'}{\partial x} + \beta v' + \left[u'\frac{\partial \Omega'}{\partial x} + v'\frac{\partial \Omega'}{\partial y}\right] = 0$$

Члены, заключенные в квадратную скобку можно пренебречь из за малости, тогда приходим к следующему уравнению:

$$\frac{\partial \Omega'}{\partial t} + \bar{u}\frac{\partial \Omega'}{\partial x} + \beta v' = 0$$

Крупномасштабные волны

Ограничиваясь случаем независимости функции от координаты у получаем уравнение для вихря скорости:

$$\frac{\partial^2 v'}{\partial x \partial t} + \bar{u}\frac{\partial^2 v'}{\partial x^2} + \beta v' = 0$$

$$v' = \sum_{s=1}^{\infty} A_s \exp(i m_s x)$$

$$\sigma_s m_s - \bar{u} m_s^2 + \beta = 0$$

$$\sigma_s = \bar{u} m_s - \beta / m_s$$

$$c_s = \bar{u} - \beta / m_s^2$$

$$v_s' = A_s \cos(2\pi / L_s (x - \bar{u} t))$$

Скорость перемещения волны равна $\bar{u}$

Вопросы для самоконтроля:

1. Метод малых возмущений, для чего он используется?
2. Используя метод малых возмщений выведите уравнение для крупномасштабных волн;
3. Получите решение уравнения для крупномасштабных волн;